

Atti del Convegno “Incontri con la Matematica nr. 17” Castel San Pietro Terme,
2003

Matematica e formazione del pensiero

Gianfranco Arrigo

Alta Scuola Pedagogica, Locarno (Svizzera)
NRD, Bologna

1. Un itinerario formativo per l'insegnamento della matematica

Oggi tutti concordano sul fatto che un curriculum di matematica per un qualunque ordine di scuola non può limitarsi al tradizionale elenco dei contenuti, anche se questo dovesse essere accompagnato da considerazioni sul metodo e sulla valutazione. A giusta ragione si ritiene che un tale documento conceda troppo alla logica disciplinare, al “sapere” e, anche se in modo implicito, metta in primo piano l'insegnamento. Da qualche decennio la ricerca didattica -in particolare quella relativa alla matematica- e la letteratura messa a disposizione degli insegnanti mettono in primo piano l'apprendimento, o, se si preferisce, l'allievo con le sue peculiarità, il suo vissuto (scolastico e no), la sua psicologia (a volte fragile o turbata; sempre in evoluzione), le sue condizioni sociali, ecc. Da parecchi anni, in didattica, ci si concentra sulla costruzione del sapere da parte dell'allievo, cercando da un lato le modalità più adatte per ottenere la migliore qualità dell'apprendimento, dall'altro di identificare gli ostacoli che vi si possono frapporre. Se si accetta questa filosofia, ci si accorge ben presto che al di là dei saperi vi sono altri oggetti di apprendimento non meno importanti dei primi.

Se l'allievo viene convenientemente stimolato e messo in condizione di contribuire in prima persona alla costruzione del proprio sapere, deve poter agire, sentirsi protagonista e riflettere su ciò che ha fatto, che sta facendo, che potrà fare. Deve quindi a poco a poco *appropriarsi di una scatola di strumenti* personalizzata che gli permetta di apprendere con sempre maggiore autonomia. L'allievo non deve essere lasciato solo in questo fondamentale compito, ma messo nella condizione di collaborare con i propri compagni. Il ruolo dell'insegnante si modifica profondamente rispetto alla tradizione: egli non è più il depositario/trasmittitore di conoscenze né responsabile unico dell'apprendimento

di tutti, ma *ideatore, organizzatore, stimolatore* di attività che permettano agli allievi di costruirsi responsabilmente la propria conoscenza. D'altra parte l'allievo non è più passivo ascoltatore, né diligente imitatore, né fedele riproduttore della conoscenza presentata dall'insegnante; al contrario, è *attivo, interessato, responsabile e cosciente* -nel limite del possibile, ma in misura sempre maggiore- *del proprio apprendimento*.

In questa ottica i contenuti fanno da sfondo: sono il campo da gioco sul quale si svilupperà la partita vera e propria. Una partita giocata sull'acquisizione di un *modo di pensare matematico*, improntata allo sviluppo di *interessi*, di abilità *ragionative, intuitive, creative*.

Un tale progetto educativo contribuisce -attraverso la pratica della matematica- alla formazione della personalità razionale, al consolidamento della fiducia in se stessi, allo sviluppo di un gusto estetico (di carattere matematico), al raggiungimento di una cultura matematica.

2. Saperi, saper fare, saper essere

Per poter agire da protagonista nel processo di apprendimento, l'allievo deve acquisire nuove risorse. Nuove nel senso che in una situazione di insegnamento frontale e di apprendimento riproduttivo non sarebbero strettamente necessarie. Oltre ai saperi, che sono sempre un ingrediente basilare dell'apprendimento scolastico, occorre sviluppare maggiormente alcune capacità procedurali strategiche e cognitive (i "*saper fare*") e infondere una mentalità "matematica" che consenta all'allievo di sentirsi responsabile del proprio apprendimento e di vivere la matematica in prima persona (i "*saper essere*").

I "saper fare" si possono classificare per esempio così:

- "saper fare" *cognitivi*: per esempio, anticipare, applicare, classificare, adattare, operare deduzioni, procedere per induzione, confrontare, decidere, formulare ipotesi,...
- "saper fare" *procedurali*: per esempio, eseguire procedimenti, applicare procedimenti/concetti/principi¹, eseguire e applicare processi algoritmici noti,...
- "saper fare" *strategici*: per esempio, stabilire relazioni fra procedimenti/concetti/principi, ideazione di strategie, riconoscimento di

¹ Questi termini sono riferiti alla Tavola tassonomica Arrigo-Frabboni (1991). Il termine concetto è da intendersi nell'ottica della didattica della matematica (vedere ad esempio D'Amore, 1999); per procedimento s'intende un qualunque algoritmo; per principio s'intende una relazione fra concetti.

situazioni significative alle quali si applicano determinate conoscenze dichiarative e/o procedurali,...

- “saper fare” *metacognitivi*: per esempio, autovalutare e autoregolare i propri processi, riflettere sull’opportunità di effettuare determinati tentativi risolutivi, prendere coscienza di determinati modi di fare o di ragionare in matematica,...

Fra i “saper essere” tipici dell’attività matematica troviamo, per esempio²:

- Apprezzare e interiorizzare aspetti valoriali indotti praticando la matematica, quali: la precisione del linguaggio; il rigore del ragionamento logico; la ricchezza del metodo di dimostrazione-confutazione; il gusto di porsi, affrontare e tentare di risolvere problemi.
- Migliorare la comprensione della realtà grazie alle attitudini di analisi.
- Guadagnare in sicurezza e in capacità argomentativa.
- Esercitare una critica oggettiva di fronte ad affermazioni proprie e altrui.
- Perseguire un atteggiamento intellettuale improntato al dubbio e alla problematizzazione della conoscenza.
- Apprezzare la vita in un mondo il più possibile coerente e rispettoso sia della razionalità sia della dimensione dei sentimenti.
- Arricchire e profilare le capacità personali di introspezione, di autonomia e di coerenza fondate sulla pratica del pensiero matematico.
- Discutere e accettare idee altrui alla luce della loro coerenza interna e correttezza logica.
- Avere il coraggio di proporre e diffondere il proprio pensiero.

3. Raggiungere competenze

È proprio la combinazione delle tre categorie di apprendimenti viste nel punto precedente che danno origine al concetto attuale di *competenza*. Scegliamo fra le varie definizioni quella del belga Xavier Roegiers: «*La competenza è la mobilitazione di un insieme articolato di risorse (saperi, saper fare e saper essere) allo scopo di risolvere una situazione significativa (di carattere disciplinare) appartenente a una famiglia data di situazioni-problema*».

Nella definizione si trovano alcune parole-chiave che è bene chiarire. Innanzi tutto il termine “*mobilitazione*”: la metafora è quella del contenitore di risorse

² L’esemplificazione è presa dal documento Piano di formazione disciplinare di matematica, UIM, Bellinzona 2002.

(conoscenze, apprendimenti già acquisiti di tipo dichiarativo e procedurale), che ogni allievo ha in testa, dal quale deve all'occorrenza scegliere opportunamente, facendo diventare dinamica la conoscenza immagazzinata. Altra terminologia: *situazione significativa (di carattere disciplinare)*. Vuol dire che la competenza si concretizza su una situazione di apprendimento (Brousseau, 1986; D'Amore 1999) sufficientemente ricca e complessa (ma non troppo...) di carattere disciplinare. In altre parole l'allievo può considerarsi competente -relativamente a un certo contenuto disciplinare- se sa muoversi con successo in una situazione centrata su quel contenuto.

Infine troviamo l'espressione *famiglia data di situazioni-problema*: il concetto di famiglia di situazioni è fondamentale, perché non si tratta di proporre una sola situazione e nemmeno di riproporne di già affrontate (neanche in fase di valutazione), ma di mettere l'allievo in varie situazioni costruite attorno al contenuto disciplinare mirato, affinché possa veramente affinare e mettere alla prova la competenza che sta acquisendo. Inoltre si parla di situazione-problema: anche se taluni autori non sono d'accordo di usare questo termine composto, ritengo importante sottolineare il termine *problema*. Ovviamente deve essere inteso nel senso che si dà oggi al termine nella ricerca in didattica della matematica: problema mai affrontato dall'allievo e non esercizio ripetitivo, simile ad altri già trattati con l'insegnante, del quale l'allievo conosce esattamente il metodo di risoluzione.

4. Il ruolo della congettura

Se mi chiedessero: «*Qual è la caratteristica essenziale di un (vero) problema?*» risponderei, senza esitazione, che per essere risolto richiede almeno la formulazione di una *congettura*.

Che cos'è una congettura? La domanda non è così banale come potrebbe apparire a prima vista. Se cerchiamo il termine su un dizionario della lingua italiana, troviamo, per esempio, la seguente definizione³:

“Latino *conjectura*, da *conicere*, gettar sopra, introdurre, interpretare.

1 Ipotesi, giudizio e sim. fondato su indizi, apparenze, considerazioni personali e sim. **2** Proposizione non dimostrata, ma di cui non si conoscono esempi che la contraddicono”.

In generale, in matematica, il termine “congettura” ha assunto nel corso dei secoli il senso di opinione o supposizione fondata su prove considerate insufficienti per dare luogo a una certezza.

³ Lo Zingarelli (2001). Bologna: Zanichelli.

La storia della matematica è zeppa di “ipotesi” nel senso di congetture: nel prossimo paragrafo vediamo alcuni esempi fra i più conosciuti.

5. Alcune congetture dei matematici

5.1. L'ipotesi di Riemann (1859)

Nel 1859, Bernhard Riemann, per poter essere ammesso all'Accademia di Berlino, scrive un breve saggio di otto pagine dal titolo: “*Sul numero di numeri primi inferiori a un dato numero*”. Il problema è affascinante e consiste nel cercare di quantificare la distribuzione dei numeri primi in intervalli successivi di N . È stato Euclide ad innescare il problema, quando con una geniale dimostrazione mostrò che i numeri primi sono infiniti. Gli allievi che attualmente frequentano la scuola media hanno modo di sperimentare questo fatto, per esempio riproducendo il Crivello di Eratostene entro il 100. Esso consiste nello scrivere tutti i numeri naturali da 1 a 100 e poi segnare quelli primi:

Se si osserva attentamente il crivello, si ha l'impressione che, continuando, i numeri primi si facciano sempre più rari. Ecco una prima congettura...

Già Euler nel XVIII secolo si era espresso sul numero di numeri primi inferiori a x , che aveva chiamato $\pi(x)$. Uno dei risultati di Euler fu l'affermazione che i numeri primi sono *infinitamente meno numerosi dei numeri naturali*, cioè che i numeri primi si fanno sempre più rari; in termini matematici:

$$\frac{\pi(x)}{x} \rightarrow 0, \text{ per } x \rightarrow \infty$$

Euler dimostrò che

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \dots = \frac{1}{1-2^s} \cdot \frac{1}{1-3^s} \cdot \frac{1}{1-5^s} \cdot \dots$$

più precisamente che:

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Questi risultati sono poi stati ripresi da Riemann. Tuttavia i lavori di Euler lasciano però ancora parecchi interrogativi aperti: si può stimare meglio la funzione $\pi(x)$?

Nel 1808 Adrien Marie Legendre osserva sperimentalmente che

$$\frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln x}$$

quindi che

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

Più o meno nella stessa epoca, Karl Friedrich Gauss pone una nuova congettura: la densità dei numeri primi in un intervallo di lunghezza dx centrato su x è circa

$$\frac{dx}{\ln x}$$

e di conseguenza la funzione $\pi(x)$ è dell'ordine di grandezza della primitiva di

$$\frac{1}{\ln x}$$

che è una funzione non esprimibile elementarmente e che viene indicata con $Li(x)$. Questo risultato non contraddice affatto quello di Legendre.

Nel 1852 Chebyshev stabilisce che, per x sufficientemente grande, vale la disuguaglianza

$$\frac{0,921 x}{\ln x} < \pi(x) < \frac{1,105 x}{\ln x}$$

Arriviamo infine alla congettura di Riemann del 1859.

Egli riprende da Euler la funzione

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \dots + \frac{1}{s^n} + \dots$$

per una variabile complessa s .

L'ipotesi di Riemann afferma che gli zeri non banali della funzione $\zeta(s)$ hanno la parte reale uguale a $1/2$; ciò significa, per esempio, che nel piano di Gauss questi zeri si dispongono sulla retta verticale $x=1/2$, detta "retta critica".

Questo risultato permette a Riemann di stabilire esattamente la distribuzione probabilistica dei numeri primi, che viene per così dire controllata dagli zeri non banali della funzione $\zeta(s)$. Da parte nostra ci limitiamo a osservare che se la congettura di Riemann fosse corretta, allora la distribuzione dei numeri primi seguirebbe fedelmente la legge $Li(x)$.

In sintesi, l'ipotesi di Riemann permette di affermare che i numeri primi si distribuiscono stocasticamente in modo tale che la probabilità che un numero x sia primo è dell'ordine di

$$\frac{1}{\ln x}$$

Ma attenzione: il comportamento locale rimane imprevedibile.

5.2. L'ipotesi del continuo (formulata da Cantor nel 1877)

Questa congettura concerne la cardinalità degli insiemi infiniti. Con la notazione $|A|$ indichiamo il numero cardinale dell'insieme A . Alla base di essa sta il seguente teorema di Georg Cantor:

Dato un insieme A (finito o infinito), si ha che $|A| < |P(A)|$; dove con $P(A)$ indichiamo l'insieme dei sottoinsiemi di A (insieme potenza).

L'applicazione iterata del teorema precedente permette la creazione di insiemi con cardinalità sempre strettamente maggiori di quella dell'insieme di partenza:

$$|A| < |P(A)| < |P(P(A))| < |P(P(P(A)))| < \dots$$

Partendo da un insieme numerabile, Cantor indica così la successione di cardinali transfiniti che si ottiene applicando il suo teorema:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots \text{ con } \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \dots$$

Ma ben presto gli si presenta il problema di capire se la cardinalità c dei numeri reali sia uguale a \aleph_1 , ovvero al livello di infinito immediatamente superiore a \aleph_0 oppure no. In altri termini, si trattava di dimostrare o confutare l'esistenza di insiemi X tali che $\aleph_0 < |X| < c$.

Cantor tentò ripetutamente di determinare un tale insieme, ma, nonostante gli sforzi, non riuscì nel suo intento. Ciò lo indusse a supporre che un tale insieme in verità non esistesse affatto. Questa sua congettura prese il nome di *Ipotesi del continuo* ($CH = \text{continuum hypothesis}$). In verità Cantor non aveva elementi sufficienti per tentare una dimostrazione efficace della sua congettura perché possedeva ancora una teoria degli insiemi alquanto imperfetta (detta teoria *ingenua* degli insiemi). La stessa fu poi perfezionata da Ernst Zermelo e da un successivo intervento di Adolf Abraham Fraenkel, che definirono un sistema di assiomi con lo scopo di aggirare i famosi paradossi della teoria messi così bene in chiaro da Bertrand Russell.

Dopo i lavori di Kurt Gödel (1938) e Paul Cohen (1963) risultò chiaro che l'ipotesi del continuo è indecidibile: cioè, se agli assiomi di Zermelo-Fraenkel si aggiunge l'ipotesi del continuo non si cade in contraddizioni, ma lo stesso varrebbe anche se vi si aggiungesse la negazione dell'ipotesi.

5.3. La congettura di Goldbach (1742)

Il 7 giugno 1742 Christian Goldbach, da Mosca, invia una lettera a Leonhard Euler, che si trovava a San Pietroburgo, nella quale afferma che: «*Ogni numero intero maggiore di 5 può essere scritto come somma di tre numeri primi*».

In risposta, Euler formula un'altra congettura equivalente: «*Ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi*».

Durante tutta la vita, Goldbach non riuscì a trovare una dimostrazione della sua intuizione. La sottopose però a moltissime verifiche, tutte con esito positivo. Altre verifiche seguirono, fra cui le seguenti.

entro il numero	verifica la congettura:
$1 \cdot 10^4$	Desboves 1885
$1 \cdot 10^5$	Pipping 1938
$1 \cdot 10^8$	Stein and Stein 1965ab
$2 \cdot 10^{10}$	Granville et al. 1989
$4 \cdot 10^{11}$	Sinisalo 1993
$1 \cdot 10^{14}$	Deshouillers et al. 1998
$4 \cdot 10^{14}$	Richstein 2001
$2 \cdot 10^{16}$	Oliveira e Silva 2003

Fino ad oggi non è stata prodotta alcuna dimostrazione corretta della congettura di Goldbach. È stato messo in palio 1 milione di dollari destinato al primo che riuscirà a dimostrare la congettura: il premio è tuttora valido...

6. Le congetture dei bambini

6.1. Il valore formativo della congettura

A chi pensa che le congetture matematiche siano un affare esclusivo dei ricercatori, dico subito che si sbaglia. Non solo, ma attraverso alcuni esempi mostrerò come le congetture che fanno gli allievi della scuola elementare, della scuola media e delle superiori, dal punto di vista cognitivo, non hanno nulla da invidiare alle congetture dei grandi matematici.

Vediamo quali sono i “saper fare” e i “saper essere” che vengono attivati quando si formula una congettura non banale in matematica. Intanto diciamo che tutto ciò deve avvenire in una situazione di risoluzione di un (vero) problema. All’inizio occorre *analizzare* la situazione allo scopo di formulare un problema interessante. Un tale problema produce di solito una forte *motivazione* a trovare una soluzione o a costruire un iter risolutivo. Di fronte a un problema mai incontrato, occorre dar prova di *intraprendenza*, di *saper ascoltare* le idee altrui, di *esprimere* il proprio parere in un’atmosfera costruttiva.

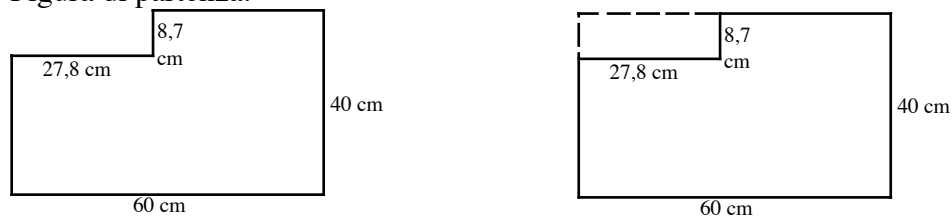
Un vero problema esige che, almeno all’inizio, si *proceda per tentativi* e si *verifichi*; provando e riprovando nascono ipotesi, convinzioni,... che, se ben formulate, possono diventare *congetture*. Queste devono essere comunicate al

gruppo di lavoro, o all'intera classe, perché se è una congettura non banale è bene che sia vagliata (confermata, confutata o modificata) da tutti quelli che vi stanno lavorando. In questo modo l'apprendimento progredisce, le idee si combinano e ne nascono altre più avanzate. Il problema si delinea più chiaramente, il percorso risolutivo prende forma. Ma non sempre le cose vanno per il meglio: occorre anche saper *gestire l'insuccesso*, trovare la forza di ritornare sui propri passi, riformulare altre ipotesi, altre congetture. È importante anche saper accettare la non riuscita. Non tutti i problemi si possono risolvere: o perché troppo difficili, o perché non si possiedono le conoscenze necessarie, oppure semplicemente perché sono impossibili. Certo, noi insegnanti dobbiamo smetterla di dare sempre problemi possibili e determinati. È tempo di promuovere una campagna per la riabilitazione della *non risoluzione* di un problema. Un problema non risolto non costituisce sempre e solo un insuccesso: basti pensare al valore formativo della riflessione che ha suscitato nelle menti degli allievi che lo hanno affrontato seriamente. Occorre dare maggiore importanza alle conquiste parziali che troppo spesso vengono relegate in secondo piano, oscurate unicamente dal fatto che non è stata raggiunta alcuna soluzione. Eppure tutto ciò è arcinoto al matematico: egli sa benissimo che la stragrande maggioranza dei suoi sforzi non giunge a buon fine e che se qualche volta gli riesce di risolvere esaustivamente un problema deve anche ringraziare quel pizzico di fortuna che accompagna sempre le grandi realizzazioni dell'uomo.

6.2. Un esempio per la scuola elementare: calcolare perimetri di poligoni rettangoli

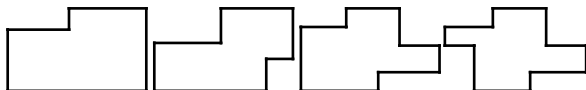
La situazione: per calcolare il perimetro di un poligono basta aggiungere le misure di tutti i suoi lati. Il calcolo diventa più semplice quando alcuni o tutti i lati hanno la stessa misura (per esempio nel caso di un parallelogrammo o di un poligono regolare). Qui si tratta di vedere se vi sono modi semplici per calcolare il perimetro di poligoni rettangoli aventi un numero qualsiasi di lati.

Figura di partenza:



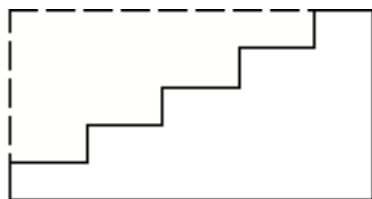
Osservazione: i dati 8,7 cm e 27,8 cm possono anche essere tralasciati. Infatti questa figura può essere vista come un rettangolo con una rientranza; ma quest'ultima non ha alcuna influenza sulla misura del perimetro...

Prima congettura: tutte le figure del tipo...

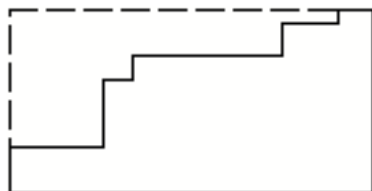


... hanno la stessa particolarità: il loro perimetro è uguale a quello del rettangolo circoscritto.

Seconda congettura: il perimetro di tutti i poligoni "a scala" è uguale a quello del rettangolo circoscritto.



Terza congettura: anche tutti i poligoni "a scala" con scalini irregolari hanno il perimetro uguale a quello del rettangolo circoscritto.



Quarta congettura: anche tutti i poligoni "a scala" con scalini casualmente disposti hanno il perimetro uguale a quello del rettangolo circoscritto.

Conclusione: per calcolare il perimetro di un poligono "a scala" non è affatto necessario conoscere il profilo degli scalini.

6.3. Un esempio per la scuola media: somme di numeri consecutivi

La situazione:

$$3 = 2+1, 5 = 2+3, 6 = 1+2+3, (...)$$

Una domanda: è sempre possibile scomporre un numero (naturale) in una somma di numeri consecutivi?

Un'osservazione: per esempio, il numero 4 non può essere così scomposto. Vale forse solo per i numeri dispari? No, perché, come già visto, $6=1+2+3$ e anche $10=1+2+3+4$ (...)

Domanda perfezionata: quali numeri non si possono scrivere come somma di numeri consecutivi?

Esempio di risoluzione (iter seguito da un gruppo di allievi di seconda media)

1 = 1 (non interessante)

2 non si può

3 = 2+1

4 non si può

5=2+3 ; 6=1+2+3 ; 7=3+4

8 non si può

9=4+5 ; 10=1+2+3+4 ; 11=5+6 ; 12=3+4+5 ; 13=6+7 ; 14=2+3+4+5 ; 15=7+8

16 non si può

17=8+9 ; 18=3+4+5+6 ; 19=9+10 ; 20= 2+3+4+5+6 ; (...)

Prima congettura: un numero dispari può sempre essere scomposto nella somma di due addendi consecutivi.

La dimostrazione è alla portata di allievi che hanno un po' di dimestichezza con il calcolo letterale:

$$2n + 1 = n + (n + 1)$$

Seconda congettura: una somma di numeri consecutivi non può mai essere una potenza di 2.

La dimostrazione esige una certa abilità nel calcolo letterale e semplici conoscenze sulla somma di una progressione aritmetica:

$$k + (k + 1) + (k + 2) + \dots + (k + n - 1) = \frac{(k + k + n - 1)}{2} \cdot n = \frac{2k + n - 1}{2} \cdot n$$

La somma potrebbe essere potenza di 2 solo se lo fossero anche n e $(2k+n-1)$. Ma se n è potenza di 2, allora $(2k+n-1)$ è un numero dispari e quindi non può essere potenza di 2.

Terza congettura: qualsiasi numero che non sia una potenza di 2 può essere espresso come somma di numeri consecutivi. Questa congettura è rimasta tale per i numeri pari.

6.4. Un esempio per le scuole superiori: pensiero combinatorio

La situazione: quanti anagrammi ha la parola CANE? E la parola PROBLEMA? E la parola TATTO? E la parola MAMMA? Quali tipi di problemi possono essere ricondotti a questa situazione basilare?

Iter risolutivo seguito da un gruppo di allievi di prima liceo

Primo tentativo:

Gli anagrammi della parola CANE li posso anche scrivere tutti; dopo di che non mi resta che contarli:

CANE ; CENA ; ENAC ; ANEC ; NEAC ; CAEN ; (...)

Se procedo a casaccio non potrò mai essere sicuro di averli scritti tutti.

Comincio a scrivere tutti quelli che iniziano con C:

CANE ; CAEN ; CNAE ; CNEA ; CEAN ; CENA

Sono 6: cioè tanti quanti sono gli anagrammi della parola ANE.

Poi quelli che iniziano con A:

ACNE ; ACEN ; ANCE ; ANEC ; AECN ; AENC

Sono ancora 6: cioè tanti quanti sono gli anagrammi della parola CNE.

Quelli che iniziano con N saranno pure 6.

Quelli che iniziano con E saranno pure 6.

Altri non ce ne sono. In totale: $4 \cdot 6 = 24$.

Prima congettura: il numero di anagrammi è uguale al numero di lettere moltiplicato per il numero di anagrammi della parola ottenuta cancellando una lettera.

Infatti $6 = 3 \cdot 2$

3 indica il numero di lettere di ANE e 2 quello degli anagrammi di NE (NE, EN).

Allora il 24 può essere scritto come $(4 \cdot 3 \cdot 2)$.

Seconda congettura: il numero di anagrammi di una parola di n lettere tutte diverse fra loro è $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 2$

Definizione: il numero $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 2$ si dice “fattoriale di n” e si scrive col simbolo $n!$

Conseguenza: siccome la parola PROBLEMA ha 8 lettere tutte diverse, possiede $8!$ anagrammi, cioè (dalla calcolatrice) 40320: letteralmente incredibile!

Secondo tentativo:

Se la parola TATTO si componesse di 5 lettere diverse, avrebbe 5! anagrammi. Osserviamo però che, scelto a caso uno di essi, se ne trovano 3! identici (quelli che si ottengono scambiando di posto fra loro le 3 T).

Dunque abbiamo:

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

anagrammi diversi.

Terzo tentativo:

La parola MAMMA, essendo composta di 3 M e 2 A, avrà quindi

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

anagrammi diversi.

Controllo:

MAMMA ; MAMAM ; MAAMM ; AMMMA ; AMMAM ; AMAMM ; MMMA ; MMAM ; MMAAM ; MMAMA

Sono 10; altri non ce ne sono.

Terza congettura: una parola di n lettere delle quali k sono uguali fra loro e le altre (n-k) sono pure uguali fra loro possiede

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

anagrammi.

Quarta congettura: una parola di n lettere delle quali k_1, k_2, \dots, k_r sono fra loro uguali possiede

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

(Consideriamo $k_i=1$ se la lettera non è ripetuta; $k_1+k_2+\dots+k_r=n$)

Stimolazione: un insieme di n elementi possiede esattamente

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

sottoinsiemi aventi k elementi. Che c'entra con gli anagrammi?

Prendiamo un esempio: supponiamo di avere un insieme con 5 elementi: $I=\{a,b,c,d,e\}$ e chiediamoci quanti sottoinsiemi di 3 elementi possiede. Ogni sottoinsieme può essere codificato con una parola di 5 lettere formata con le lettere P (l'elemento è preso) e N (l'elemento non è preso nel sottoinsieme). Per esempio, il sottoinsieme $\{b,c,e\}$ viene biunivocamente legato alla parola NPPNP. Si capisce allora che esistono

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

diversi sottoinsiemi di I aventi 3 elementi: tanti quanti sono gli anagrammi della parola NPPNP, che sono poi gli stessi della parola MAMMA. Anche la legge generale a questo punto è chiara.

Definizione: si chiama coefficiente binomiale il numero:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} := \binom{n}{k}$$

Per convenzione si pone

$$\binom{n}{0} = 1$$

(esiste sempre un sottoinsieme con zero elementi!)

Quinta congettura: si sa che un insieme di n elementi possiede 2^n sottoinsiemi, dunque dovrà valere la formula:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Sesta congettura: se si sviluppa la potenza n-esima del binomio $(a+b)$, si ottiene un polinomio omogeneo (rispetto alle lettere a,b) di grado n. I coefficienti di ciascun monomio non sono altro che quelli binomiali. Cioè:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

o in forma sintetica:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Per rendersene conto, basta osservare che per ottenere il monomio $a^{n-k} b^k$

occorre scegliere tra gli n fattori $(a+b)^k$ i k dai quali estrarre la lettera b , cioè scegliere k elementi da un insieme di n elementi.

A questo punto risulta automaticamente dimostrata anche la quinta congettura: basta osservare che

$$2^n = (1+1)^n = \dots$$

e applicare la sesta congettura.

7. Conclusione

Non credo di dover aggiungere altro a quanto affermato e, spero, dimostrato nei punti precedenti. L'attività matematica a scuola deve essere vissuta dagli allievi come una piacevole, stimolante, coinvolgente avventura. Nei momenti più importanti dell'apprendimento l'allievo deve essere lasciato libero di agire (ovviamente in un contesto convenientemente predisposto) e deve assumersi la responsabilità di gestire per un certo tempo il proprio lavoro, le proprie conquiste. Lavorando in questo modo l'allievo dovrebbe raggiungere una formazione ottimale del pensiero (in senso matematico) -in particolare dovrebbe sviluppare al meglio le proprie capacità ragionate e intuitive-, dovrebbe acquisire un gusto estetico nei confronti della matematica e percepire in maniera forte il suo valore culturale.

Questa è la mia grande speranza. Insegnanti, coraggio, provateci: ne vale la pena!

Bibliografia

- D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla M. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.
- Devlin K. (2002). *Il linguaggio della matematica*. Torino: Bollati Boringhieri.
- Autori vari (2002). *Piano formativo di matematica per la scuola media*. Bellinzona: UIM.